

Ορισμός

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ δύο Ευκλείδεια χώροι και $T: V \rightarrow V'$ αντιστοιχισμός. Η T λέγεται ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ αν η T είναι 1-1, επί, ΓΡΑΜΜΙΚΗ και $\langle T(u), T(w) \rangle' = \langle u, w \rangle$ για $u, w \in V$.

Πρόταση

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. Ορίζουμε $\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$ με $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Τότε για κάθε $u, w \in V$ ισχύει ότι $\langle v, w \rangle = \frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}$.
(Από η αντιστοιχισμός $\| \cdot \|$ καθορίζει το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον V)

Απόδειξη

$$\frac{\|v+w\|^2 - \|w\|^2 - \|v\|^2}{2} = \frac{\langle v+w, v+w \rangle - \langle w, w \rangle - \langle v, v \rangle}{2} \quad \leftarrow \text{εξαρτησιμότητα}$$

$$= \frac{\langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle}{2} \quad \leftarrow \text{συμμετρία} = \langle v, w \rangle$$

Συμπέρασμα: Έστω V χώρος εσωτερικού γινόμενου αν έχουμε τρία από τις 3 αντιστοιχίες

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\| \cdot \|: V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

τότε έχουμε και τις άλλες δύο

Πρόταση

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $(V', \langle \cdot, \cdot \rangle')$ Χ.Ε.Γ. και $T: V \rightarrow V'$ γραμμική, 1-1 και επί. Τ.Α.Ε.Ι

- T γραμμική ισομετρία (δηλ $\langle T(u), T(w) \rangle' = \langle u, w \rangle$ για $u, w \in V$).
- $\|T(u)\|' = \|u\|$ για κάθε $u \in V$
- $d(T(u), T(w)) = d(u, w)$ για κάθε $u, w \in V$

Απόδειξη

$$i) \Rightarrow ii) \quad \|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u) \rangle \stackrel{i)}{=} \langle u, u \rangle = \|u\|^2$$

$$ii) \Rightarrow i) \quad \text{Έστω } u, w \in V, \\ \langle T(u), T(w) \rangle = \frac{\|T(u+T(w))\|^2 - (\|T(u)\|)^2 - (\|T(w)\|)^2}{2}$$

$$T \text{ γραμμική} \Rightarrow \frac{(\|T(u+w)\|)^2 - (\|T(u)\|)^2 - (\|T(w)\|)^2}{2}$$

$$\stackrel{ii)}{=} \frac{\|u+w\|^2 - \|u\|^2 - \|w\|^2}{2} = \langle u, w \rangle$$

Πρόταση

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. $V \neq \{0\}$ πεπερασμένο διάστημα.

Έστω $T: V \rightarrow V$ γραμμική.

T.A.E.I

i) T γραμμική ισομετρία

ii) $d(T(u), T(w)) = d(u, w)$ για κάθε $u, w \in V$.

Απόδειξη

i) $\Rightarrow$ ii) το είδαμε

ii) $\Rightarrow$ i) Πρέπει να δείξουμε

- 1) $\langle T(u), T(w) \rangle = \langle u, w \rangle \quad \forall u, w \in V$
- 2) $T: 1-1$
- 3) ενί

Το 1) το είδαμε.

ii) Η T είναι 1-1, γιατί αν η T όχι 1-1, $\ker T \neq \{0\}$. Άρα, υπάρχει $v \in V - \{0\}$ με $T(v) = 0_V$.

Άρα, $d(T(v), 0_V) = d(T(v), T(0_V)) \stackrel{ii)}{=} d(v, 0_V) = \|v\| \neq 0_{\mathbb{R}}$
αφαι $v \neq 0_V$, αντίφαση

Άρα T γραμμική 1 $\Rightarrow \dim \text{Im } T = \dim V - \dim \ker T = \dim V - 0 = \dim V$
 $\Rightarrow \text{Im } T = V$ άρα T ενί

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Έστω (V, d) Χ.Ε.Γ. πεπερασμένης διάστασης με $V \neq \{0\}$.
Αν $f: V \rightarrow V$ συνάρτηση ώστε
 $d(f(v), f(w)) = d(v, w)$ για κάθε $v, w \in V$
και $f(0_V) = 0_V$ τότε f ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΣΟΜΕΤΡΙΑ.

Ορισμός

Αν V δ.χ. και $w \in V$ ορίζουμε
 $S_w: V \rightarrow V$ με $S_w(v) = w + v$ (μεταφορά κατά διάνυσμα w)
↑
(είναι οι γραμμικές)

Πόρισμα

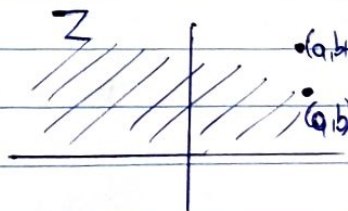
Έστω (V, d) Χ.Ε.Γ. πεπερ. διάστασης και $h: V \rightarrow V$ με $d(h(u), h(w)) = d(u, w)$
τότε υπάρχει μοναδική $T: V \rightarrow V$ γραμ. ισομετρία ώστε
 $h = T \circ S_{h(0)}$

Το πρόβλημα μας λέει ότι μόνο η συνθήκη η διατηρεί την
μετρική είναι αρκετή για να βρούμε το αποτέλεσμα,
ότι η h είναι μετατολισμένη γραμμική ισομετρία.
Άρα, h ενί.

Παράδειγμα

Έστω $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

$$f: Z \rightarrow Z, \quad f(a, b) = (a, b+1)$$



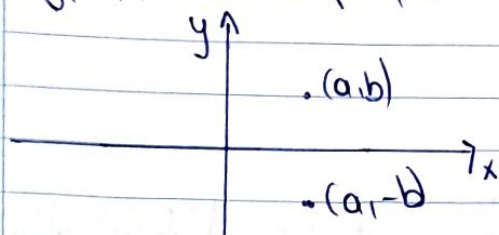
Η f είναι 1-1 και διατηρεί αποστάσεις. Αλλά, f οχι ενί
γιατί $\text{Im } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\} \neq Z$

Παρατήρηση : Το πρόβλημα μας λέει ότι για να καταλάβουμε τις ισομετρίες του V , το πιο σημαντικό βήμα είναι να καταλάβουμε τις ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ.

Παραδείγματα Ισομετρίων

Έστω $V = \mathbb{R}^2$ με συνδυασ εσωτερικού γινόμενο.

- 1) Η αντανάκλαση $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T((x,y)) = (x, -y)$ είναι γραμμική ισομετρία του $\mathbb{R}^2$ με $\det T = -1$



• T αντανάκλαση ως προς τον άξονα των x

• T γραμμική ισομετρία γιατί φανερά T γραμμική, $1-1$, επί

και για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\|T(x,y)\| = \|(x, -y)\| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|$

Έστω $e = (e_1 = (1,0), e_2 = (0,1))$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$.

$[T]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ με ορίζουσα -1 , άρα $\det T = -1$

- 2) Έστω $\phi \in [0, 2\pi)$ και $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $[T]_e^e = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$
δηλ. $T((x,y)) = (\cos \phi \cdot x - \sin \phi \cdot y, \sin \phi \cdot x + \cos \phi \cdot y)$

$\forall T$ γραμμική

Έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\|T(x,y)\|^2 = (\cos \phi x - \sin \phi y)^2 + (\sin \phi x + \cos \phi y)^2 =$$

$$= x^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + y^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\|$$

Άρα $\det [T]_e^e = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1 \Rightarrow T: 1-1$, επί και άρα T γραμ. ισομετρία με $\det T = 1$

Ορισμός

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ο A λέγεται **ορθογώνιος** αν $A^T A = A A^T = I_n$

Αντίστροφο A ορθογώνιος αν και μόνο αν
 A αντιστρέφεται και $A^{-1} = A^T$

Παρατήρηση: Από Γραμμική I: Αορθογώνιος $\Leftrightarrow A A^T \neq I_n$
 $\Leftrightarrow A^T A \neq I_n$

Παραδείγματα

Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ο πίνακας I_n για κάθε $n \in \mathbb{R}$

$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$ είναι ορθογώνιος.

Πρόταση

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος $\Rightarrow \det A = 1$ ή -1 .

Απόδειξη

$$\begin{aligned} A A^T &= I_n \Rightarrow \det(A A^T) = \det(I_n) = 1 \\ &\Rightarrow (\det A)(\det A^T) = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \\ &\Rightarrow \det A \in \{1, -1\} \end{aligned}$$

Ορισμός

- a) Το κανονικό ή εσωτερικό γινόμενο στον $\delta.x. \mathbb{R}^{1 \times n}$ είναι το $\langle (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$
- b) Το κανονικό ή εσωτερικό γινόμενο στον $\delta.x. \mathbb{R}^{n \times 1}$ είναι το $\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$

Πρόταση

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

T.A.E.J.

- i) A ορθογώνιος
- ii) Οι βιάντες του A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n \times 1}$ με το εσωτερικό γινόμενο.
- iii) Κάθε βιάνη του A έχει (στο $\mathbb{R}^{n \times 1}$ με το εσωτερικό Ε.Γ.) μήκος 1 και κάθε δύο διαφορετικές βιάνες είναι (στον ίδιο χώρο) κάθετες.
- iv) Οι γραμμές του A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{1 \times n}$ με το εσωτερικό Ε.Γ.
- v) Κάθε γραμμή του A έχει (στο $\mathbb{R}^{1 \times n}$ με το εσωτερικό εσωτερικό γινόμενο) μήκος 1 και κάθε δύο διαφορετικές γραμμές του A είναι (στον ίδιο χώρο) κάθετες.

Παράδειγμα

- 1) Υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{bmatrix}$ να είναι ορθογώνιος;

Οχι, από το iii) του παραπάνω πρότασης γιατι η πρώτη βιάνη του A έχει μήκος

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$$

- 2) Υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & y \\ x & 1 \end{bmatrix}$ να είναι ορθογώνιος;

Οχι, γιατι πρέπει η δεύτερη βιάνη να έχει μήκος 1.

Από, $\sqrt{1^2 + y^2} = 1 \Rightarrow \boxed{y=0}$ και τότε η πρώτη γραμμή έχει μήκος

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0} \neq 1$$

3) Υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & y \\ x & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ να είναι ορθογώνιος;

Λύση

Έστω A ορθογώνιος. Τότε οι στήλες του A είναι κάθετες μεταξύ τους.

$$\text{Απο, } \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow y = x$$

Συνεπώς $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ x & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Μινος πρώτου στήλης $= 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ή } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Βλέπουμε ότι για αυτές τις τιμές του x η δεύτερη στήλη του A έχει επίσης μινος 1.

Απο, A ορθογώνιος δι και μινος α

$$(x, y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ή } (x, y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Πρόταση (χωρίς απόδειξη)

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Χ.Ε.Γ. πεπερ. διαστάσης με $V \neq \{0\}$,

$T: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση και $e = (e_1, \dots, e_n)$

ΟΡΘΟΚΑΝΟΝΙΚΗ βάση του V .

T.A.E.J.

- i) T γραμμική ισομετρία
- ii) $[T]_e \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος.

Με άλλα λόγια, οι ορθογώνιοι πίνακες είναι οι πίνακες γραμμικών ισομετρίων ως προς ορθοκανονική βάση.

Προσέχει μένει η βάση να είναι ορθοκανονική.

(Υπόδειγμα)

Πρόταση

A ορθογώνιος $\Leftrightarrow$ κάθε στήλη μήκος 1 και δύο διαφορετικές στήλες κάθετες.

Απόδειξη

Έστω $c_1, c_2, \dots, c_n$ οι στήλες του A ,

$$\text{όπου } A = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

$$\text{Τότε } A^t = \begin{bmatrix} c_1^t \\ c_2^t \\ \vdots \\ c_n^t \end{bmatrix}$$

Αρα, ο πίνακας $A^t A$ έχει (c_i, c_j) -στοιχείο 160 με

$$\begin{matrix} & \uparrow & \uparrow \\ \text{Tr}(c_i^t, c_j) & = & \langle c_i, c_j \rangle \\ \text{1xn} & \text{nx1} \end{matrix}$$

Αρα, $A^t A = I_n \Leftrightarrow \langle c_i, c_j \rangle = \delta_{ij}$ < δέλτα το Kronecker

$$\text{εξ' ορισμού } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Πρόταση

Έστω $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιοι.

Τότε

- i) I_n είναι ορθογώνιος
- ii) A^{-1} είναι ορθογώνιος
- iii) AB ορθογώνιος.

Δηλαδή, το σύνολο των ορθογώνιων πινάκων περιέχει τον ταυτοτικό και είναι κλειστός προς το πολλαπλασιασμό και την αντιστροφή.

Αρα, είναι ομάδα με την μηδενιστική έννοια.

Απόδειξη

Το i) προφανές

$$\begin{aligned} \text{ii) Έχουμε } AA^t &= I_n \Rightarrow (A \cdot A^t)^{-1} = I_n^{-1} \Rightarrow (A^t)^{-1} \cdot A^{-1} = I_n \\ &= (A^{-1})^t \cdot A^{-1} = I_n \end{aligned}$$

$$\text{Έχουμε } (AB)^t(AB) = (B^t A^t) \cdot (AB) = B^t (A^t \cdot A) B = B^t I_n B = B^t \cdot B = I_m$$

Παράδειγμα

$$\text{Έστω } \theta \in (0, \pi) \text{ και } R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

η γραμμική κατά γωνία θ .

Έχει ο R_θ πραγματικές ιδιοτιμές;

Οχι, γιατί αν είχε θα υπήρχε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ μη μηδενικό ώστε $R_\theta(x, y) = \lambda(x, y)$ ανεξάρτητα.
Αλλάζουν, αφού $\theta \in (0, \pi)$ άρα $\theta \neq k\pi$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$

Πρόταση

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ορθογώνιος και $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ με $a, b \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή του A αν τον δώσουμε στο στοιχείο του $\mathbb{C}^{n \times n}$.
Τότε $a^2 + b^2 = 1$. (Λογισμός: $AT = I_n$ ισοδύναμο ο A είναι πεπεσμένος ορθός με μέτρο 1.

Πόρισμα: Αν $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$.

Επίσημα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ ορθογώνιος. Είναι ο $A - 5I_5$ αντιστρέψιμος;

(Υποδείξω: 1 ιδιοτιμή του A $\in$ $A - \lambda I_n$ ότι αντιστρέψιμος)

Λύση

Αλλά A ορθογώνιος το 5 δεν είναι ιδιοτιμή του A γιατί από την πρόταση, οι μόρες δυνατές ιδιοτιμές ενός ορθογώνιου πινάκα στο $\mathbb{R}$ είναι 1 και -1.

Άρα, $A - 5I_5$ αντιστρέψιμος.

Με το ίδιο επιχείρημα, αν $a \in \mathbb{R}$ με $a \neq 1$ και τον -1 ο $A - aI_n$ αντιστρέψιμος.